



Thayer Bang



## Thøger Bang

27. juni 1917 – 18. januar 1997

Af Christian Berg

Thøger Sophus Vilhelm Bang blev født 27. juni 1917 som eneste barn af Thomas Bartholin Bang og Ellen Bodil Hee Andersen. Thøgers far, der var cand.mag. i historie og ansat ved Rigsarkivet, døde allerede i 1920 af den spanske syge, og Thøger boede alene med sin mor på Frederiksberg, til han i en moden alder i 1957 giftede sig med kemikeren Eva Henriette Møller. Thøgers mor var registrator ved Rigsarkivet, og hun levede helt til 1983.

Thøger var allerede som skoleelev stærkt interesseret i matematik og fæstningsværker – to emner, som forblev centrale i hans liv. Som matematiklærer i gymnasiet havde han den senere professor ved Den Polytekniske Lærestalt A.F. Andersen. Thøger blev student fra Sct. Jørgens Gymnasium i 1934 kort før sin 17-års fødselsdag. Samme efterår begyndte han at studere på universitetet, og efter forprøven fulgte han især forelæsninger ved Harald Bohr. Efter 5 års studier blev Thøger cand.mag. i matematik i juni 1939. I de første år efter eksamen ernærede Thøger sig ved opgaveretning på Landbohøjskolen og Den Polytekniske Lærestalt, og fra 1940-49 underviste han ved forberedelseskurset på lærestalten. Fra 1942 var han desuden assistent ved universitetets matematiske institut på Blegdamsvej.

I sin studietid og i årene som ungtkarl var Thøger en hyppig deltager i studenterforeningen Parentesens fester. Efter en fest skulle Thøger med natbåden til Århus. Thøger var lidt forsinket – de, der har kendt ham godt, vil smile genkendende – landgangen var taget og båden ved at gå fra kaj. Thøger smed resolut sin kuffert ombord og sprang over og fik fat i et gelænder, hvorefter hjælpsomme folk fik ham halet indenbords.

Thøgers første videnskabelige arbejde blev publiceret i Matematisk-Fysiske Meddelelser i Videnskabernes Selskabs Skrifter i 1941. Det bærer titlen: "Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques" og vil blive omtalt nærmere nedenfor. I

1943 fik han universitetets guldmedalje for en “ypperlig besvarelse”, som Bohr og Nørlund skriver, af en opgave vedrørende quasi-analytiske funktioner, et emne, som videreførtes i doktorafhandlingen fra 1946. Traditionen tro blev denne trykt på dansk. Det var synd, for det vanskeliggjorde udbredelsen af en betydningsfuld afhandling, som adskillige udlændinge har måttet stave sig igennem. Lad mig nævne to episoder i den forbindelse. Ved den internationale matematikerkongres i Warszawa i 1983 faldt jeg i snak med en canadisk matematiker. Da han erfarede, at jeg var dansk, måtte jeg love ham næste dag at oversætte visse passager fra Thøgers disputats, som han havde på hotelværelset – 37 år efter den var udkommet. I 1994-95 havde Matematisk Institut ansat Mikhail Sodin fra Kharkov i Ukraine som gæstelektor. Han fortalte meget om den funktionsteoretiske tradition i Kharkov grundlagt af S. Bernstein og B. Levin. I Kharkov skulle alle doktorstuderende stifte bekendtskab med Bangs arbejde om quasi-analytiske funktioner. Jeg kan en passant tilføje, at det også galdt Jessen og Tornehaves arbejde “Mean motions and zeros of almost periodic functions”, *Acta Math.* 77, 1945.

Thøger var på studieophold i Paris og Cambridge i England i 1947-48 samt i USA i 1950-51, hvor han bl.a. var visiting lecturer ved Rice Institute i Houston. Ved Rice opholdt han sig sammen med den franske matematiker S. Mandelbrojt, som han havde lært at kende i Paris og som også var specialist i quasi-analytiske funktioner.

I 1956 tiltrådte Thøger Bang som professor ved Københavns Universitet, idet Jakob Nielsen, der i en årrække var sekretær i Videnskabernes Selskab, gik på pension pr. 31.1.1956. Der var 3 ansøgere til professoratet, og man kan læse om udvalgets bedømmelse af de 3 ansøgere i Universitetets årsskrift. Tillad mig at citere konklusionen: “Udvalget finder imidlertid at måtte give dr. Bang fortrinsret blandt ansøgerne, idet han ved sin idérige produktion inden for et betydningsfuldt felt af matematikken i særlig grad har været nyskabende; han har i sine undersøgelser vist en sjælden evne til gennem simplifikation at trænge frem til problemernes kerne”. Det er tankevækkende at notere, hvor hurtigt ansættelser kunne effektueres dengang: Ansøgningsfristen var 12. april 1955, udvalget afgav indstilling 1. juni 1955, og indstillingen blev tiltrådt af fakultetet den 13. september 1955.

Året 1955 blev i flere henseender begivenhedsrigt for Thøger. Månederne januar, februar og marts tilbragte han i Madrid, hvor han efter invitation gæsteforelæste over quasi-analytiske funktioner. I april 1955 blev han indvalgt i Videnskabernes Selskab, og han blev udnævnt til medredaktør af det højt renommerede tidsskrift *Acta Mathematica*. Han var med i redaktionen til 1988. *Acta* anses med rette for et af matematikverdenens førende tidsskrifter. Det blev grundlagt af den svenske matematiker Mittag-Leffler i 1882, og i de første 99 år havde tidsskriftet kun 2 hovedredaktører. Efter Mittag-Lefflers død i 1927 var Niels Erik Nørlund hovedredaktør, til han døde i 1981.

Thøgers videregående undervisning på universitetet lå især inden for områderne talteori og quasi-analytiske funktioner, to emner, som også forskningsmæssigt lå hans hjerte nær. Han har også forelæst over funktionalligninger og integralgeometri. I forelæsninger over projektiv geometri i begyndelse af 1950erne inspirerede han Sten Hansen til at forsøge at generalisere en sætning af Sylvester. Sten Hansen blev senere rektor for Ordrup Gymnasium. Når tiden tillod det, vendte Sten Hansen tilbage til emnekredsen, og i 1981 var Thøger opponert ved hans disputats "Contributions to the Sylvester-Gallai-theory". Thøger huskes af de studerende især for sine mange forelæsninger over talteori. Christian U. Jensen og Asmus Schmidt har på Københavns Universitet videreført de talteoretiske aspekter i form af Galoisteori og algebraisk talteori. I 1960erne underviste Thøger i algebra på studiets første del, og det var i den forbindelse, jeg først lærte Thøger at kende i 1964. Med den store tilgang af studerende i begyndelsen af 1960erne var det umuligt at rekruttere et tilstrækkeligt antal instruktører blandt de ældre studerende, og man indførte begrebet kammeratinstruktør, dvs. som instruktører valgte man studerende, der selv skulle følge kurset. Det krævede naturligvis, at lærerne tog sig særligt af disse kammeratinstruktører for at være sikre på, at de forstod den matematik, de skulle hjælpe de studerende med. Thøger var altid venlig og hjælpsom, en smule genert, men lun. Det var en dejlig oplevelse for kammeratinstruktørerne at blive inviteret til julegløgg i rækkehuset på Vagtelvej, hvor jeg første gang traf Thøgers kone Eva og deres dengang lille datter Camilla. De er begge tilstede her i aften.

Thøgers matematiske forskning lå inden for områderne reel

funktionsteori, geometri og talteori. Desuden har Thøger bidraget til matematikkens historie i Danmark. Jeg har allerede nævnt Thøgers første arbejde om Kolmogoroffs uligheder. Kolmogoroff havde i 1938 annonceret disse uligheder uden bevis i det franske *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Thøgers bevis gik ud på først at udlede ulighederne for næsten periodiske funktioner og dernæst ved et approksimationsresultat på elegant måde at udvide resultatet til det almindelige tilfælde. Ved samme lejlighed opnåede han nye simple beviser for uligheder af Harald Bohr, Favard og Bernstein.

Thøgers disputats var som nævnt et bidrag til teorien for quasi-analytiske funktioner. En funktion af en reel variabel kaldes analytisk, hvis den er uendeligt ofte differentiabel og desuden kan fremstilles lokalt ved sin Taylorrække i hvert punkt. De almindeligt kendte funktioner som eksponential-, logaritmefunktion og trigonometriske funktioner tilhører denne klasse. Gennem Cauchys og Weierstrasses undersøgelser af kompleks funktionsteori i 1800-tallet blev sammenhængen mellem analytiske funktioner og deres udvidelse til dele af den komplekse plan helt opklaret. Cauchy opdagede, at en uendeligt ofte differentiabel funktion ikke behøver at være analytisk, idet Taylorrækken i et punkt ikke nødvendigvis konvergerer mod funktionen selv. Det er i denne forbindelse, de quasi-analytiske funktioner dukker op. De er ikke analytiske, men Taylorrækken gør det alligevel muligt at bestemme funktionen ved en passende summabilitetsmetode. Teorien nåede en foreløbig afslutning i tyverne med en berømt sætning af Denjoy og Carleman, som karakteriserede quasi-analytiske funktionsklasser ved divergens af en vis uendelig række. Beviserne for dette resultat i reel analyse udnyttede kompleks funktionsteori og blev derfor af nogle matematikere anset for unødigt komplicerede. Der var følgelig et ønske om at finde mere direkte og elementære beviser, der kunne siges at trænge ind til problemets kerne. Det var sådanne beviser, som blev fundet og publiceret af Thøger i disputatsen fra 1946. Beviserne har en geometrisk iklædning, der gør dem særdeles anskuelige.

Thøger løste som den første Tarskis plankeproblem fra 1932. Problemet er geometrisk, og det vil blive formuleret nedenfor. Thøgers afhandling "On covering by parallel-strips", *Matematisk Tidsskrift B*(1950), pp. 49-53, var medvirkende til at give ham en

aura af genialitet og ikke uden grund. Mange matematikere havde i de forløbne 18 år måttet opgive at løse problemet. En forenkling af beviset blev præsenteret ved den internationale matematikerkongres i 1950 i Cambridge, USA og publiceret i *Proceedings of the American Mathematical Society* 2 (1951), pp. 990-993. Jeg vil nøjes med at formulere problemet i det plane (to-dimensionale) tilfælde, selv om Thøger angav løsningen i vilkårlig dimension. Ved en parallelstrimmel forstås området mellem to parallelle linjer, og afstanden mellem linjerne er bredden af parallelstrimlen. Vi kan kalde en sådan strimmel for en planke. Hvis vi betragter en plan konveks figur, som antages afsluttet og begrænset, så kan vi i enhver retning finde en planke, der netop dækker figuren, altså er så smal som mulig. Bredden af denne planke kaldes figurens bredde i den givne retning. En cirkelskive har samme bredde i enhver retning, men en ellipse har naturligvis mindst bredde i storaksens retning. Til enhver konveks figur, som er afsluttet og begrænset, findes en retning, hvor bredden er mindst mulig. Denne bredde kaldes figurens minimalbredde. Tarski formulerede følgende påstand: Hvis figuren er dækket med et antal planker af varierende retning og bredde, så er summen af plankernes bredde større end eller lig med figurens minimalbredde. Resultatet kan synes geometrisk oplagt, men Tarski var kun i stand til at bevise resultatet i meget specielle tilfælde, og han fremsatte det generelle tilfælde som formodning. Thøgers bevis er meget elegant og relativt kort, men det er umuligt at gengive ved denne lejlighed.

Thøgers vigtigste arbejde inden for talteori er hans elementære bevis for primtalsætningen, som siger, at antallet af primtal mindre end eller lig med  $n$  er approksimativt lig med  $n/\log n$ . Primtalsætningen blev bevist i 1896 af Hadamard og de la Vallée Poussin ved hjælp af kompleks funktionsteori. Mange matematikere fandt det utilfredsstillende, at en lovmæssighed om primtal kun kunne bevises ved kompleks funktionsteori, og søgte efter andre bevismetoder, men først i 1949 lykkedes det Erdős og Selberg at give elementære beviser, dvs. beviser, der ikke benytter kompleks funktionsteori. I 1963 præsenterede Thøger et simpelt elementært bevis byggende på en ulighed vedrørende reelle funktioner. Senere har Thøger i samarbejde med Bent Fuglede vist en talteoretisk sætning om produkter af binomialkoefficienter. Resultatet blev brugt af Fuglede og undertegnede i et arbejde om egenværdimultiplicite-

ten af Liouvilles operator for en cirkelskive i rummet. Dette arbejde var inspireret af Jesper Lützens studier af den franske matematiker Liouvilles efterladte papirer, hvori Lützen opdagede begyndelsen til en spektralteori for en integraloperator, som efterfølgende blev kaldt Liouvilles operator.

I forbindelse med Københavns Universitets 500-års jubilæum i 1979 påtog Kirsti Andersen og Thøger Bang sig at beskrive matematikkens udvikling i Danmark i perioden set i relation til Københavns Universitet. De delte opgaven mellem sig, så Thøger beskrev perioden 1800-1979. Her ser man Thøgers evne for i korte prægnante formuleringer at give en karakteristik af fagets udvikling og af sine forgængere. Dette blev indledningen til flere matematikhistoriske arbejder, først og fremmest mindeord og nekrologer bl.a. over Niels Erik Nørlund, i Selskabets Oversigt 1982-83, i *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* (1983) og i *Acta Mathematica* 162 (1988). Thøger var sammen med Eva en flittig deltager i møderne i Selskabet for de Eksakte Videnskabers Historie, og i perioden 1983-1995 var han dets formand. Han ledede møderne stilfærdigt med et lunt smil, bakkende på sin uundværlige pibe.

Ud over matematikken havde Thøger en livslang interesse for fæstningsværker og deres historie, og i militærhistoriske kredse var han højt respekteret for sin viden. Lad mig nævne Thøgers afhandlinger: "Københavns befæstning under svenskekrigen", pp. 61-119 i bogen *Et vendepunkt i Københavns historie*, Gad 1959 og "Vestenceinten 1914-1918", pp. 3-17 i *Krigshistorisk Tidsskrift* 29,3 (1993). Det skal også nævnes, at da Thøger fyldte 70 og blev fejret af Dansk Matematisk Forening, besluttede han at tale om fæstningshistorie. Thøger lod ingen lejlighed gå fra sig til at udforske fæstningsanlæg her og i udlandet. Jeg husker fra matematikerkongressen i Nice i 1970, at jeg en aften mødte Eva alene til en koncert i anledning af kongressen. Hun var bekymret. Thøger var draget afsted om eftermiddagen for at kigge på et fæstningsanlæg i byens udkant, og han var ikke kommet tilbage, inden det var blevet mørkt. Der var heldigvis ikke sket andet, end at der havde været så mange spændende ting at kigge på, at koncerten havde fået en lavere prioritet. Studiet af fæstningsværker har naturligvis geometriske aspekter, men Thøgers interesseområder gik langt videre. Thøger ejede en stor samling værdifulde gamle bøger, bl.a. flere af



Carnots værker om fæstningshistorie og Georg Mohrs berømte bog Euclides Danicus fra 1672. Han havde også Pufendorfs bog om Karl X Gustav med Dahlberghs berømte kobberstik, bl.a. Karl X Gustavs ligfærd. Han var siden 1983 et skattet medlem af Dansk Bibliofilklub.

Thøger var af væsen venlig og ligefrem, og samtale med ham gav altid ny overraskende viden, selv om han ikke var et menneske med stærkt formulerede synspunkter. Han mødte trofast frem til møder i Selskabet og i de videnskabelige foreninger, indtil en stadig mere svækket hørelse gjorde det svært for ham selv og andre at få udbytte af samværet. I slutningen af 1996 blev Thøger indlagt på Frederiksberg Hospital, skrøbelig, men i godt humør. Han fortalte mig, at han var optaget af at læse Jules Verne på fransk. Jeg tror, de fantasifulde forudsigelser tiltalte ham, og som han sagde: "Der er et halvt hundrede bind, så jeg kan sagtens få tiden til at gå."

Thøger døde på hospitalet den 18. januar 1997.

Æret være hans minde.